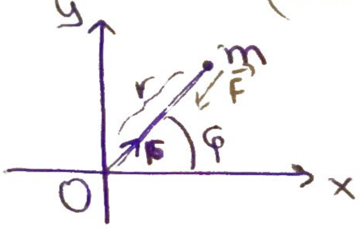
Άσκηση 1 aptsiarakos@hotmail.com

ΠΡΟΟΔΟΣ 25/5/2017 (15:00) 18/5/2017 (1)

Ένα σωμάτιο m κινείται στο επίπεδο Oxy, υπό την επίδραση κεντρικής, ελκτικής δύναμης, από το αρχικό O, αντίστροφα ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης από το O. Με τη μέθοδο Lagrange να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις για την κίνηση. $L=T-V$

Λύση

(δύναμη: $-\frac{k}{r^2}$, k: σταθερά, $-$ γιατί είναι αντίθετη σε φορά. από O)



Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο είναι

$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{r_0}$.

Εκφράζω το σύστημα με γενικευμένες συντεταγμένες. Διαλέγω πολικές. Αν εισάγουμε πολικές συντεταγμένες r, ϕ ως γενικευμένες συντεταγμένες q_1, q_2, θα έχουμε $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

Στην κεντρική δύναμη το δυναμικό είναι:

$$V(r) = \int F(r)\,dr = -\int -\frac{k}{r^2}\,dr = \frac{-k}{r} \quad \text{(αόριστο ολοκλήρωμα)}.$$

$\underline{T=}$: θέλω να βρω τα

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\phi}\cos\phi. \end{cases}\right\} \rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2 =$$

Άρα

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}\cos\varphi\, r\dot{\phi}\sin\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\varphi + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2\dot{r}\sin\phi\, r\dot{\phi}\cos\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2(\underbrace{\sin^2+\cos^2\varphi}_{1}) + \dot{r}^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}) + 2\dot{r}r\dot{\phi}\underbrace{(\cos\varphi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi)}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Οπότε: $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k}{r}$

Βρίσκουμε τις εξισώσεις Lagrange

α) Για την r:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{r^2}$$

Άρα: $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{k}{r^2}$.

$(m \quad a_r = F_r)$

Για τη φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

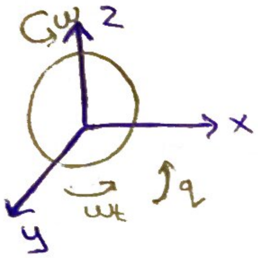
Άρα $\frac{\partial}{\partial t}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = \text{σταθερή} = k$

Άσκηση 2

Ένα βαρύ σωμάτιο m μπορεί να κινείται χωρίς τριβή πάνω σε έναν κύκλο (0, a) που περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφη διάμετρο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. (ω) Τότε θέλουμε να βρεθεί η εξίσωση για την κίνηση του σωματίου επάνω στον κύκλο και η θέση όπου αυτό ισορροπεί, αν αφεθεί χωρίς ταχύτητα.

Λύση

Η θέση του σωματίου πάνω στον κύκλο, καθορίζεται από τη γωνία q,



Σφαιρικές: $x = a\cos\omega t\cos q$

$y = a\sin\omega t\cos q$

$z = a\sin q$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin\omega t(a\cos q)\omega - a\cos\omega t\sin q\cdot\dot{q} \\ \dot{y} = a\cos\omega t\cos q\cdot\omega - a\dot{q}\sin\omega t\sin q \\ \dot{z} = \dot{q}a\cos q \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \dots = \frac{ma^2}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2\cos^2 q)$$

$$V = m\cdot g\cdot z = mga\sin q$$

$$L = T - V = \frac{ma^2}{2}(\dot{q}^2 + \omega^2\cos^2 q) - mga\sin q$$

η L δεν είναι συνάρτηση του t. (Φυσικοί συντεταγμ.: q)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \cancel{2}\frac{ma^2}{\cancel{2}}\dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -ma^2\omega^2\cos q\cdot\sin q - mga\cos q$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$= ma^2\ddot{q} + ma^2\omega^2\cos q\sin q + mga\cos q = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2\cos q\sin q + \frac{g}{a}\cos q = 0$$

έχουμε 1 βαθμό ελευθερίας

(Σταθερό q. άρα $\ddot{q}=0$.)

Άρα για να ισορροπεί το σωμάτιο σε μία θέση, πρέπει σε αυτή τη θέση να είναι το q σταθερό $\Rightarrow \ddot{q}=0$.

Άρα $\left(\omega^2 \sin q + \frac{g}{a}\right)\cos q = 0 \Rightarrow \cos q = 0 \Rightarrow q = \pm\frac{\pi}{2}$

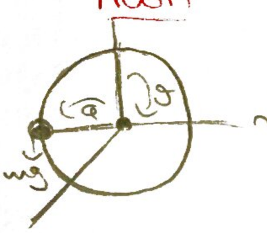
ή $\sin q = -\frac{g}{a\omega^2}$.

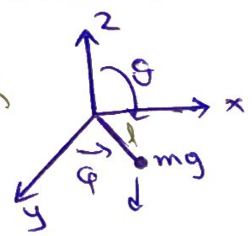
Η θέση αυτή, είναι εκείνη που η συνισταμένη του βάρους και της φυγόκεντρης δύναμης είναι μηδέν.

Άσκηση l: μήκος του εκκρεμούς

Να βρεθούν οι εξισώσεις για την κίνηση σφαιρικού εκκρεμούς.

Λύση Έχω 2 β.ε. (άρα 2 Lagrange)





Η θέση του εκκρεμούς προσδιορίζεται από τις γωνίες φ και θ

$x = l\cos\varphi\sin\theta$ | $\dot{x} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + l\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta$

$y = l\sin\varphi\sin\theta$ | $\dot{y} = l\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + l\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta$

$z = l\cos\theta$ | $\dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{m}{2}l^2\left[\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right]$$

$$V = mgz = mgl\cos\theta$$

Άρα $L = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - mgl\cos\theta$

α) Εξίσωση για το θ

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta$$

Είναι: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$

Άρα $ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta = 0$

β) Εξίσωση για το ϕ:

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$. Άρα $\frac{\partial}{\partial t}\left(ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = c$

Άρα $ml^2\ddot{\varphi}\cdot\sin^2\theta + ml^2\dot{\varphi}\,2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} - 0 = 0$

(πρέπει να παραγωγ. και το φ και το θ)